Journal of Recent Advancements in Material Science and Biomedical Engineering
Vol. 1, Issue 1, Spring 2025, 19-30
ram.apadana.ac.ir

Apadana Institute of Higher Education

Kinetic Analysis in Three-Dimensional Movements Using Two-Dimensional Inverse Dynamics Methods

Majed Dehghani — Ph.D. Candidate in Biomedical Engineering, Comprehensive Rehabilitation Center, Red Crescent Society of the Islamic Republic of Iran, Tehran, Iran.

Shahab Zolriasatein — Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Morteza Dorjani — Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering – Aerospace – Biomedical Engineering, Faculty of Engineering, Ramsar Branch, Islamic Azad University, Ramsar, Iran.

Farhad Tabatabai Ghomsheh* — Professor, Pediatric Neurorehabilitation Research Center, Department of Ergonomics, University of Social Welfare and Rehabilitation Sciences, Tehran, Iran.

Received: 09/April/2025
Accepted: 29/May/2025
eISSN: ---------
ISSN: ---------

Abstract

In this paper, the obstacles to solve three-dimensional motion problems using two-dimensional Newton-Euler analyses are presented and examined. The three-dimensional motion analysis method used in industry and medicine is based on a robotic approach and is based on the mathematics of matrix analysis. This approach requires a deep understanding of matrix mathematics and controlling the accuracy of its performance at each stage, which has its own complexities. The aim of this paper is to apply two-dimensional methods for analyzing problems that are inherently three-dimensional and require spatial geometric vector analyses. The main method proposed in this paper to solve the major problem of three-dimensional analyses is to use a two-dimensional image of the member length instead of using the full length of the member in calculations, especially when calculating the moment of inertia of three-dimensional objects on a plane. This research is a type of mathematical analysis and proves the similarity of the results between two-dimensional and three-dimensional approaches in the analysis of three-dimensional problems. The analysis tool in this study is the inverse dynamics method. The assumption of dynamic determinism governs the analysis, that is, for each unknown variable, an equation between the variables in the problem is necessary. This is important in most problems assuming that the spatiotemporal data of the movement of each member and at least one end or joint in the mechanism are known. The results obtained in this paper show that it is possible to calculate the moment of inertia of three-dimensional objects moving in space using two-dimensional kinematic analyses. The advantages and disadvantages of both three-dimensional and two-dimensional methods are mentioned in this research. The use of two-dimensional methods in the analysis of three-dimensional objects moving in space provides a better understanding of the movement and monitoring the results. Also, with this approach, researchers can monitor the accuracy of the results and the spatiotemporal trend of kinematic variables and prevent and avoid computational errors and mathematical modeling in describing three-dimensional movements.

Keywords: joint range of motion, linear and angular velocities and accelerations, three-dimensional moment of inertia, inverse dynamic analysis

* Corresponding Author: tabatabai@uswr.ac.ir

فصلنامه پیشرفت‌های مهندسی در حوزه‌ی پزشکی و مواد
دوره ۱، شماره ۱، بهار ۱۴۰۴، ۱۹-۳۰
ram.apadana.ac.ir

موسسه آموزش عالی آپادانا
غیر دولتی - غیر انتفاعی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۰۸
eISSN: ---------
ISSN: ---------

تحلیل سینتیک در حرکات سه‌بعدی با استفاده از روش‌های دینامیک معکوس دوبعدی

ماجد دهقانی — دانشجوی دکتری رشته‌ی مهندسی پزشکی، دانشگاه آزاد واحد تهران جنوب مرکز جامع توان‌بخشی، جمعیت هلال‌احمر جمهوری اسلامی ایران، تهران، ایران.

شهاب ذوالریاستین — استادیار، گروه فیزیک، دانشکده‌ی علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران، ایران.

مرتضی درجانی — استادیار، گروه مهندسی مکانیک – هوافضا – مهندسی پزشکی، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رامسر، رامسر، ایران.

فرهاد طباطبائی قمشه* — استاد مرکز تحقیقات توان‌بخشی اعصاب اطفال، گروه ارگونومی، دانشگاه علوم توان‌بخشی و سلامت اجتماعی، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، موانع حل مسائل سه‌بعدی حرکت با استفاده از تحلیل‌های دوبعدی نیوتن اویلر، ارائه و بررسی می‌شود. روش تحلیل سه‌بعدی حرکت که در صنعت و پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بر مبنای نگرش رباتیک و بر اساس ریاضیات تحلیل ماتریس‌ها استوار است. این رویکرد، نیازمند درک عمیق ریاضیات ماتریس بوده و کنترل صحت عملکرد آن در هر مرحله، پیچیدگی‌های خود را دارد. هدف تحقیق، تصحیح روش‌های دوبعدی برای تحلیل مسائلی است که ذاتاً سه‌بعدی بوده و نیازمند تحلیل‌های برداری هندسی فضایی هستند. روش اصلی پیشنهادی در این مقاله برای رفع مشکل عمده‌ی تحلیل‌های سه‌بعدی، استفاده از تصویر دوبعدی طول عضو به جای استفاده از طول کامل عضو در محاسبات به‌ویژه در هنگام محاسبه‌ی ممان اینرسی اجسام سه‌بعدی در صفحه است. این تحقیق، از نوع تحلیل ریاضی و اثبات همسانی نتایج بین دو نگرش دو و سه‌بعدی در تحلیل مسائل سه‌بعدی است. ابزار تحلیل در این مطالعه، روش دینامیک معکوس است. فرض معین بودن دینامیکی، حاکم بر تحلیل است؛ یعنی به ازای هر متغیر مجهول، یک معادله‌ی فی‌مابین متغیرهای موجود در مسئله ضرورت دارد. این مهم در اغلب مسائل، با فرض معلوم بودن داده‌های فضایی زمانی حرکت هر عضو و معلوم بودن حداقل یک انتها یا مفصل در مکانیزم است. نتایج به‌دست‌آمده، نشان می‌دهد که امکان محاسبه‌ی ممان اینرسی اجسام سه‌بعدی متحرک در فضا با استفاده از تحلیل‌های دوبعدی سینماتیک فراهم است. مزایا و معایب دو روش سه‌بعدی و دوبعدی، در این تحقیق اشاره شده است. استفاده از روش‌های دوبعدی در تحلیل اجسام سه‌بعدی که در فضا حرکت می‌کنند، امکان درک بهتر حرکت و نظارت بر نتایج را فراهم می‌آورد. همچنین محققان با این رویکرد می‌توانند بر صحت نتایج و روند فضایی زمانی متغیرهای سینماتیک نظارت نمایند و از بروز خطاهای محاسباتی و مدل‌سازی ریاضی در توصیف حرکات سه‌بعدی، پیشگیری و اجتناب نمایند.

کلیدواژه‌ها: دامنه‌ی حرکتی مفاصل، سرعت‌ها و شتاب‌های خطی و زاویه‌ای، ممان اینرسی سه‌بعدی، تحلیل دینامیک معکوس

* نویسندهٔ مسئول: tabatabai@uswr.ac.ir

مقدمه

تحلیل‌های سینماتیک حرکات در صنعت و پزشکی، با استفاده از روش‌های هندسه‌ی فضایی به کمک ماتریس‌های سه‌بعدی امکان‌پذیر است. این روش‌ها به دلیل ماهیت پیچیده، امکان ره‌گیری فرآیند و پیش‌بینی تغییرات متغیرهای سینماتیکی را ناممکن می‌نمایند. برخی روش‌ها مبتنی بر تحلیل بردارها و مقادیر ویژه در برخی حالت‌های خاص توسعه یافته‌اند که البته تسلط بر آن‌ها نیز اغلب به دانش و بینش ریاضی قابل توجهی نیاز دارد. اغلب ارائه‌ی یک روش ساده و دقیق که در عین سادگی، خطاهای ناشی از ساده‌سازی را نیز به توصیف ریاضی سیستم القا ننماید، به‌طور عمده مقدور نیست. حتی در برخی نگرش‌های مدل‌سازی، برای ایجاد یک تصویر کلی از عملکرد سیستم، پذیرفتن خطا و دور شدن از واقعیت ناگزیر می‌نماید. در این مقاله، با استفاده از فرضیات منطقی در تحلیل سه‌بعدی سینماتیک حرکت فرضیاتی لحاظ شده است که با استفاده از روش‌های دوبعدی نیز می‌توان به همان دقت تحلیل‌های سه‌بعدی دست یافت.

پیشینه‌ی پژوهش

تحلیل سینماتیکی و سینتیکی حرکت انسان، از دیرباز به‌عنوان یکی از روش‌های پایه در مطالعات بیومکانیک مورد استفاده قرار گرفته است. در این میان، روش‌های تحلیل سه‌بعدی به‌واسطه‌ی توانایی بالا در نمایش حرکت در محورهای مختلف فضایی، به‌ویژه در مطالعات گام برداری، تحلیل مفاصل و طراحی ارتز و پروتز، جایگاه مهمی پیدا کرده‌اند (۱). این روش‌ها با استفاده از سیستم‌های ثبت حرکت نوری، صفحات نیرو و نرم‌افزارهای پردازش دینامیکی، امکان اندازه‌گیری دقیق نیروها، گشتاورها و ممان اینرسی در سطوح مختلف حرکتی را فراهم می‌کنند.

با این حال، تحلیل‌های سه‌بعدی، همواره با چالش‌هایی چون هزینه‌ی بالا، پیچیدگی تجهیزات، نیاز به فضای خاص آزمایشگاهی و نیاز به آموزش پیشرفته همراه بوده‌اند (۲)؛ از این‌رو، تحلیل دوبعدی حرکت، به‌عنوان روشی ساده‌تر و در دسترس‌تر، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در پژوهشی که توسط جانسون و همکاران[1] (۳) انجام شد، نشان داد که در شرایط کنترل‌شده و حرکات ساده، روش‌های دوبعدی می‌توانند با دقت قابل قبولی به تحلیل متغیرهای حرکتی بپردازند؛ به‌ویژه در صفحه ساجیتال که در گام برداری کاربرد بیشتری دارد.

در همین راستا، لی و همکاران[2] (۴)، با معرفی مدلی ریاضی که در آن از طول تصویر دوبعدی یک عضو به جای طول واقعی آن در فضا استفاده می‌شود، نشان دادند که امکان برآورد دقیق‌تر ممان اینرسی در محیط دوبعدی وجود دارد. این روش، به‌طور خاص در تحلیل حرکت اجسام صلبی که در یک صفحه‌ی غالب حرکت می‌کنند (مانند اندام تحتانی در حین راه رفتن)، کاربردپذیری بالایی دارد.

در مطالعات بالینی نیز استفاده از ابزارهای پوشیدنی مانند حسگرهای حرکتی یا کفش‌های هوشمند، همراه با تحلیل دوبعدی، توانسته است راهکارهایی عملی و کم‌هزینه برای تحلیل حرکت بیماران فراهم کند؛ به‌عنوان نمونه، سیائو و همکاران[3] (۵)، در مطالعه‌ای روی بیماران سکته‌ی مغزی، از تحلیل دوبعدی همراه با حسگرهای پوشیدنی برای پایش کیفیت گام برداری بهره بردند.

با وجود این تلاش‌ها، هنوز شکاف‌هایی درزمینه‌ی تخمین پارامترهای دینامیکی سه‌بعدی با استفاده از داده‌های دوبعدی وجود دارد. ازجمله‌ی این شکاف‌ها می‌توان به عدم امکان تحلیل حرکات چرخشی پیچیده، تخمین دقیق ممان اینرسی و محدودیت‌های وابسته به زاویه‌ی دید اشاره کرد.

1. Johnson et al.
2. Lee et al.
3. Seo et al.

در این راستا، پژوهش حاضر با بهره‌گیری از روش دینامیک معکوس و مدل‌سازی ریاضی، مدلی ارائه می‌دهد که با استفاده از طول تصویر عضو در صفحه، امکان تخمین دقیق‌تری از پارامترهای سینتیکی سه‌بعدی را در محیط‌های دوبعدی فراهم می‌سازد. این مدل، می‌تواند به‌عنوان ابزاری برای افزایش دقت تحلیل‌های دوبعدی و کاهش نیاز به ابزارهای گران‌قیمت سه‌بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

روش

در تحلیل حرکت سه‌بعدی، به‌ویژه در کاربردهای مهندسی پزشکی و رباتیک صنعتی، از رویکردهای گوناگونی بهره گرفته می‌شود. دو شیوه‌ی رایج در این حوزه، شامل ۱) تحلیل برداری در فضای سه‌بعدی و ۲) تحلیل مبتنی بر جبر ماتریسی است؛ رویکردی که به‌طور خاص در مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی سامانه‌های رباتیک کاربرد دارد (۶).

در این روش، به‌منظور توصیف دقیق وضعیت و حرکت اجزای مکانیکی، از ماتریس‌هایی با ابعاد متغیر استفاده می‌شود که این ابعاد با تعداد درجات آزادی سیستم، رابطه‌ی مستقیم دارند. هر درجه‌ی آزادی -نظیر جابه‌جایی خطی، دوران زاویه‌ای یا تغییر طول بازو- موجب افزایش ابعاد ماتریس‌های جابه‌جایی، سرعت و شتاب می‌گردد (۷).

تحلیل این سامانه‌ها، به درک عمیق مفاهیم پیشرفته در جبر خطی و دینامیک چندجسمی نیاز دارد. افزون بر این، راستی‌آزمایی نتایج و کنترل صحت محاسبات در هر مرحله، مستلزم تسلط بر مدل‌سازی فضایی و تکنیک‌های عددی دقیق است (۸، ۹).

در فضای اقلیدسی سه‌بعدی، موقعیت یک نقطه، به‌وسیله سه متغیر مستقل مشخص می‌شود که معمولاً با مختصات کارتزین (x, y, z) نمایش داده می‌شوند؛ بنابراین، توصیف کامل وضعیت دو نقطه‌ی مستقل در فضا، مستلزم شش متغیر مستقل است. با این حال، اگر این دو نقطه به‌وسیله‌ی یک عضو صلب (میله‌ای بدون تغییر شکل) به یکدیگر متصل باشند، یک قید هندسی به سیستم اعمال می‌شود؛ به این معنا که فاصله‌ی بین آن دو نقطه، همواره ثابت باقی می‌ماند.

این قیدِ فاصله‌ی ثابت، یکی از درجات آزادی سیستم را حذف می‌کند و تعداد متغیرهای مستقل لازم برای توصیف حرکت کلِ سیستم، به پنج کاهش می‌یابد. چنین حالتی، نمایانگر یکی از اصول بنیادین در تحلیل حرکت اجسام صلب بوده که در آن تعداد درجات آزادی، همواره برابر است با تعداد متغیرهای آزاد منهای تعداد قیود مستقل هندسی یا سینماتیکی اعمال‌شده بر سیستم.

این مفاهیم، شالوده‌ی مدل‌سازی سینماتیک و دینامیک سیستم‌های چندجسمی و همچنین تحلیل اجسام صلب در حوزه‌های مهندسی مکانیک، رباتیک و بیومکانیک را تشکیل می‌دهند (۸، ۱۰).

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (۱)$$

برای تحلیل سینتیک این میله در فضا، لازم است نیروها و گشتاورهای وارد بر آن مشخص شوند.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (۲)$$

$$\Sigma \overrightarrow{M_G} = \vec{I}\,\vec{\alpha} \quad (۳)$$

حال اگر تصویر این عضو در یکی از صفحات اصلی دستگاه مختصات کارتزین را دنبال نماییم، خواهیم داشت:

$$\Sigma F_x = m\,\bar{a}_x \quad (۴)$$

$$\Sigma F_y = m\,\bar{a}_y \quad (۵)$$

$$\Sigma M_G = I_{GZ}\,\alpha_Z \qquad (۶)$$

برای تشکیل معادله‌ی ۶، نیاز است ممان اینرسی تصویر جسم در صفحه‌ی xy حول محور عمود بر صفحه (که از مرکز ثقل جسم می‌گذرد)، یعنی ممان اینرسی تصویر جسم حول محور z که از مرکز ثقل جسم می‌گذرد، محاسبه شود. پیشنهاد ارائه‌شده در مقاله‌ی حاضر، این است که در این ممان اینرسی به جای استفاده از طول میله، از طول تصویر همان میله در صفحه‌ی xy استفاده شود.

به‌صورت عمومی، قانون پیشنهادی به شرح زیر است:

برای تشکیل معادله‌ی نیوتن اویلر برای تصویر یک جسم صلب سه‌بعدی در یک صفحه‌ی دوبعدی، به جای استفاده از طول جسم، از طول تصویر همان جسم در صفحه‌ی مورد مطالعه استفاده شود.

در تحلیل سینتیک سه‌بعدی میله‌های صلب در صفحه، یعنی هنگامی که تصویر یک میله‌ی صلب در صفحه رصد می‌شود، باید توجه شود که علی‌رغم ثابت بودن طول میله در فضا که مصداق صلب بودن ذات آن است، اما تصویر میله در صفحه‌ی طولی متغیر حتی به مقدار صفر را نیز تجربه خواهد کرد. صفر بودن طول تصویر میله در صفحه، مربوط به حالتی است که در آن شرایط خاص میله بر صفحه‌ی مورد مطالعه عمود است؛ یعنی تصویر میله در چنین شرایطی، یک نقطه‌ی بدون بعد خواهد بود؛ اما اگر میله با صفحه زاویه‌ی غیرمتعامد داشته باشد، طول تصویر عددی، بزرگ‌تر از صفر است. حداکثر طول تصویر میله در صفحه نیز مربوط به وضعیتی است که میله به‌طور کامل با صفحه موازی است.

چنین رویکردی بر مبنای تحلیل‌های دوبعدی، سهولت قابل توجهی را برای تحلیل مسائلی که ذاتاً سه‌بعدی بوده و نیازمند تحلیل‌های برداری هندسی فضایی هستند، فراهم می‌آورد.

این تحقیق، از نوع تحلیل ریاضی و اثبات همسانی نتایج بین دو نگرش دو و سه‌بعدی در تحلیل مسائل سه‌بعدی است. ابزار تحلیل در این مطالعه، روش دینامیک معکوس است. فرض معین بودن دینامیکی حاکم بر تحلیل است؛ یعنی به ازای هر متغیر مجهول، یک معادله فی‌مابین متغیرهای موجود در مسئله ضرورت دارد. این مهم، در اغلب مسائل با فرض معلوم بودن داده‌های فضایی زمانی حرکت هر عضو و معلوم بودن حداقل یک انتها یا مفصل در مکانیزم است.

یافته‌ها

نتایج به‌دست‌آمده در مقاله‌ی حاضر، نشان می‌دهد امکان محاسبه‌ی ممان اینرسی اجسام سه‌بعدی متحرک در فضا با استفاده از تحلیل‌های دوبعدی سینماتیک فراهم است. مزایا و معایب دو روش سه‌بعدی و دوبعدی، در این تحقیق به تفصیل بیان شده است.

به‌عنوان نمونه، داده‌های ارائه‌شده در جداول ۱ و ۲، مربوط به یک آزمون راه رفتن طبیعی فردی با وزن ۶۵۰ نیوتن هستند که با نرخ نمونه‌برداری ۱۰۰ هرتز توسط سیستم‌های آنالیز حرکت نوری و صفحات نیرو ثبت شده‌اند. این داده‌ها، شامل موقعیت مفاصل در فضای سه‌بعدی و مؤلفه‌های نیروهای عکس‌العمل زمین در طی چرخه‌ی گام می‌باشند. در این مقاله، نیروها و گشتاورهای اعمال‌شده به مفاصل مچ پا و زانو در صفحه‌ی ساجیتال (YZ)، بر اساس تحلیل دینامیک معکوس محاسبه و به‌طور کامل تبیین شده‌اند (۹).

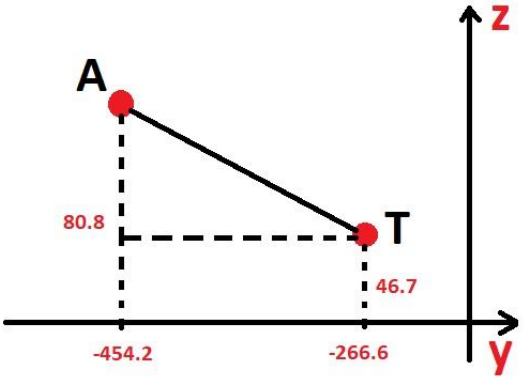
جدول ۱. اطلاعات سینماتیک ثبت‌شده برای یک آزمودنی در حین راه رفتن عادی با فرکانس ۱۰۰ هرتز توسط دستگاه آنالیز حرکت

Frame	TOE			ANKLE			KNEE		
	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
۱	۳۵۰/۹	−۲۶۹	۴۹	۳۲۹/۴	−۴۵۶/۲	۸۱	۳۸۳/۸	−۴۸۹/۸	۴۹۹/۷
۲	۳۵۰/۴	−۲۶۷/۷	۴۸/۱	۳۲۹/۴	−۴۵۵	۸۰/۹	۳۸۷	−۴۸۲/۳	۵۰۰/۲
۳	۳۴۹/۹	−۲۶۶/۶	۴۶/۷	۳۲۹/۳	−۴۵۴/۲	۸۰/۸	۳۹۰/۲	−۴۷۵/۲	۵۰۰/۹
۴	۳۴۹/۳	−۲۶۵/۸	۴۵/۶	۳۲۹/۲	−۴۵۳/۵	۸۱	۳۹۳/۳	−۴۶۷/۷	۵۰۱/۴
۵	۳۴۸/۸	−۲۶۵/۳	۴۴/۹	۳۲۹/۲	−۴۵۲/۸	۸۱/۳	۳۹۶	−۴۵۹/۷	۵۰۱/۳

جدول ۲. اطلاعات سینتیک ثبت‌شده برای یک آزمودنی در حین راه رفتن عادی با فرکانس ۱۰۰ هرتز توسط صفحات نیرو

Frame	GROUND REACTION FORCE (N)			CENTER OF PRESSURE	
	Fx	Fy	Fz	AX(m)	AY(m)
۱	۱۶/۵	−۶۹/۱	۷۱۶/۸	۲۴۳/۵	−۴۶۶/۷
۲	۶/۶	−۷۴/۴	۷۶۳/۲	۲۴۵	−۴۵۷/۹
۳	−۸/۳	−۷۱/۹	۸۰۲/۶	۲۴۶/۱	−۴۵۴/۲
۴	−۲۸/۳	−۸۶/۱	۸۴۲/۵	۲۴۶/۵	−۴۴۸/۵
۵	−۳۴/۹	−۷۲/۵	۸۸۹/۶	۲۴۷/۳	−۴۴۵

– مرحله‌ی اول: رسم عضو در فریم سوم



شکل ۱. موقعیت سه‌بعدی دو مفصل پنجه (TOE) و مچ پا (ANKLE) در فریم میانی از هر پنج فریم متوالی نمایش داده شده است (۹).

همچنین بردارهای نیروهای عکس‌العمل زمین (GRF) به‌منظور تحلیل هم‌زمان وضعیت مفاصل و نیروهای خارجی واردشده از زمین، در شکل ۱ افزوده خواهند شد.

– مرحله‌ی دوم: تحلیل هندسی

در این مرحله، ابتدا مقادیر ΔY و ΔZ بین دو نقطه‌ی پنجه (TOE) و مچ پا (ANKLE) در هر یک از پنج فریم متوالی محاسبه می‌شود. سپس زاویه‌ی قرارگیری کف پا با استفاده از رابطه‌ی $\theta_{Foot}(rad) = \tan \Delta Z/\Delta Y$ به دست می‌آید (۹).

برای استانداردسازی محاسبات، فرض می‌شود که رابطه‌ی ΔY و ΔZ به‌گونه‌ای تعریف شود که در فریم سوم، مقدار هر دو بدون نیاز به قدر مطلق، دارای علامت مثبت باشند. در صورتی که نتیجه‌ی زاویه‌ی θ به‌صورت منفی

محاسبه شود، همان مقدار منفی با عدد π جمع می‌شود تا زاویه‌ی مکمل متناظر آن به دست آید. همچنین در فریم سوم، طول بردار AT نیز محاسبه می‌شود.

– مرحله‌ی سوم: محاسبه‌ی سرعت‌ها و شتاب‌های خطی مچ پا و زاویه‌ای پا[1] با استفاده از روش مشتق مرکزی قابل انجام است.

به‌عنوان نمونه، سرعت خطی مچ پا در راستای محور قائم (Z)، با رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است (۹):

$$VAz(i) = \frac{Z(i+1) - Z(i-1)}{2\Delta t} \quad (۷)$$

جدول ۳. نتایج تحلیل سینماتیک داده‌های جدول ۱ بر اساس روابط مشتق مرکزی و توابع مثلثاتی

ΔY (mm)	ΔZ (mm)	AT yz (mm)	Θ,foot (rad)	ω,foot (rad/s)	α,foot (rad/s2)	Vy,ankle (m/s)	Vz,ankle (m/s)	ay,ankle (m/s2)	az,ankle (m/s2)
۱۸۷/۲	۳۲		۰/۱۶۹۳۰۳۸						
۱۸۷/۳	۳۲/۸		۰/۱۷۳۳۶۲۲	۰/۵۲۵۱		۰/۱	−۰/۰۱		
۱۸۷/۶	۳۴/۱	۱۹۰/۶۷۴	۰/۱۷۹۸۰۶۶		۳/۵۹۷			−۱/۵	۱/۷۵
۱۸۷/۷	۳۵/۴		۰/۱۸۶۴۰۹۲	۰/۵۹۷۱		۰/۰۷	۰/۰۲۵		
۱۸۷/۵	۳۶/۴		۰/۱۹۱۷۴۸۲						

– مرحله‌ی چهارم: محاسبه‌ی اینرسی‌ها

در این مرحله، پارامترهای اینرسی مربوط به کف پا (Foot) بر اساس وزن کل بدن و ابعاد هندسی پا محاسبه می‌شوند. این پارامترها، شامل وزن پا W_{Foot}، جرم پا m_{Foot}، شعاع ژیراسیون پا حول مفصل مچ پا $r_{Foot/Ankle}$ و ممان اینرسی پا نسبت به مفصل مچ پا در صفحه ساجیتال $I_{Foot/Ankle}$ است.

W_{total}: وزن کل بدن (نیوتن)

W_{foot}: وزن کف پا (نیوتن)

m_{Foot}: جرم کف پا (کیلوگرم)، برابر با وزن کف پا تقسیم بر شتاب گرانش زمین.

$R_{F/A}$: شعاع ژیراسیون یا فاصله‌ی مرکز جرم کف پا تا محور چرخش مفصل مچ پا در صفحه‌ی ساجیتال (متر)

AT_{yz}: طول بردار AT (فاصله‌ی بین دو نقطه در صفحه‌ی YZ) در فریم سوم (متر)

$I_{A\,yz}$: ممان اینرسی کف پا حول مفصل مچ پا در صفحه‌ی ساجیتال (کیلوگرم/ مترمربع)

$W_{foot} = 0.0145\ W_{total}$ (N)

$m_{Foot} = W_{foot} / 9.81$ (kg)

شعاع ژیراسیون پا حول مفصل مچ پا در صفحه‌ی ساجیتال $R_{F/A} = R_{Foot/Ankle} = 0.69 * AT_{yz}$

$I_{Foot/Ankle\,yz} = I_{A\,yz} = m_f * R_{F/A}^2$

در این روابط:

- وزن کل بدن، از وزن فرد مورد مطالعه استخراج می‌شود.
- وزن و جرم کف پا، با درصد وزنی تعیین‌شده بر اساس داده‌های بیومکانیکی استاندارد تعیین شده است (۹).
- شعاع ژیراسیون به‌عنوان نسبت ثابتی از طول بردار AT در صفحه‌ی ساجیتال تعیین می‌شود.
- ممان اینرسی کف پا حول مفصل مچ پا، با استفاده از جرم پا و شعاع ژیراسیون مربع محاسبه می‌شود که برای تحلیل دینامیکی حرکت اهمیت دارد.

1. foot

طبق جدول آنتروپومتری شعاع ژیراسیون پا نسبت به مچ پا ($R_{F/A}$)، معادل با ۰/۶۹ طول پا در صفحه‌ی ساجیتال (AT_{yz}) است. این مقدار، حتماً در ۱/۱۰۰۰ ضرب می‌شود تا یکای ابعادی آن از میلی‌متر به متر تبدیل شود. پارامتر AT_{yz}، طول پا در صفحه‌ی ساجیتال بوده که از فریم میانی به دست آمده است.

جدول ۴. نتایج محاسبه‌ی اینرسی‌ها؛ شامل W_{Foot}, m_{Foot}, $r_{Foot/Ankle}$, $I_{Foot/Ankle}$

W_{total} (N)	W_{foot} (N)	m_{foot} (kg)	$R_{F/A}$ (m)	$I_{Foot/Ankle\ yz}$ (kg/m^2)
۶۵۰	۹/۴۲۵	۰/۹۶۰۷۵	۰/۱۳۱۵۶۵	۰/۰۱۶۶۳

– مرحله‌ی پنجم: ترسیمه‌ی آزاد و ترسیمه‌ی اینرسی جسم

در این مرحله، جسم مورد مطالعه در فریم سوم با توجه به موقعیت مفاصل در صفحه‌ی مختصات شامل محورهای اصلی (X, Y, Z) رسم شده و نیروهای وارده بر روی آن نمایش داده می‌شود.

توجه ویژه‌ای لازم است که برای قسمت پا، نیروهایی که توسط دستگاه صفحات نیرو ثبت و اندازه‌گیری شده‌اند نیز باید به‌صورت بردارهای نیرو بر روی شکل وارد شوند تا تحلیل نیروها به‌طور دقیق انجام گیرد (۹).

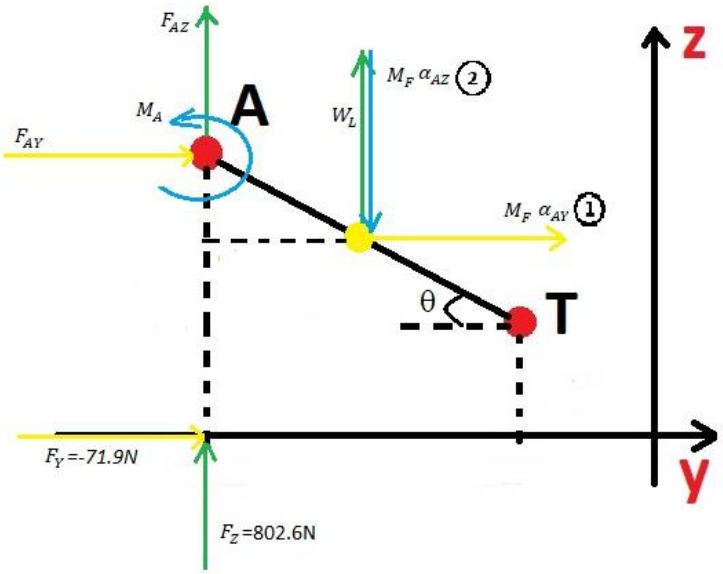
همچنین، نسبت فاصله‌ی مرکز جرم هر عضو نسبت به مفصل پروگزیمال یا دیستال آن در جدول آنتروپومتری (جدول ۵) استاندارد بیومکانیکی ارائه شده است و این داده‌ها برای تعیین دقیق موقعیت مرکز جرم هر بخش بدن استفاده می‌شوند.

جدول ۵. جدول آنترومتری

	Segment	Definition	Segment Weight / Total Body Weight	Center of Mass / Segment Length: Proximal	Center of Mass / Segment Length: Distal	Radius of Gyration / Segment Length: Center of Gravity	Radius of Gyration / Segment Length: Proximal	Radius of Gyration / Segment Length: Distal
1.	Hand	Wrist axis / knuckle II middle finger	0.006	0.506	0.494	0.297	0.587	0.577
2.	Forearm	Elbow axis / ulnar styloid	0.016	0.430	0.570	0.303	0.526	0.647
3.	Upper arm	Glenohumeral joint / elbow axis	0.028	0.436	0.564	0.322	0.542	0.645
4.	Forearm and Hand	Elbow axis / ulnar styloid	0.022	0.682	0.318	0.468	0.827	0.565
5.	Total arm	Glenohumeral joint / ulnar styloid	0.050	0.530	0.470	0.368	0.645	0.596
6.	Foot	Lateral malleolus / head metatarsal II	0.0145	0.50	0.50	0.475	0.690	0.690
7.	Leg	Femoral condyles / medial malleolus	0.0465	0.433	0.567	0.302	0.528	0.643
8.	Thigh	Greater trochanter / femoral condyles	0.100	0.433	0.567	0.323	0.540	0.653
9.	Foot and Leg	Femoral condyles / medial malleolus	0.061	0.606	0.394	0.416	0.735	0.572
10.	Total Leg	Greater trochanter / medial malleolus	0.161	0.447	0.553	0.326	0.560	0.650
11.	Head and Neck	C7-T1 and 1 st rib / ear canal	0.081	1.000	-	0.495	1.116	-
12.	Shoulder mass	Sternoclavicular joint / glenohumeral axis	-	0.712	0.288	-	-	-
13.	Thorax	C7-T1 / T12-L1 and diaphragm	0.216	0.82	0.18	-	-	-
14.	Abdomen	T12-L1 / L4-L5	0.139	0.44	0.56	-	-	-
15.	Pelvis	L4-L5 / greater trochanter	0.142	0.105	0.895	-	-	-
16.	Thorax and Abdomen	C7-T1 / L4-L5	0.355	0.63	0.37	-	-	-
17.	Abdomen and Pelvis	T12-L1 / greater trochanter	0.281	0.27	0.73	-	-	-
18.	Trunk	Greater trochanter / glenohumeral joint	0.497	0.50	0.50	-	-	-
19.	Trunk Head Neck	Greater trochanter / glenohumeral joint	0.578	0.66	0.34	0.505	0.830	0.607
20.	HAT (Head Arm Trunk)	Greater trochanter / glenohumeral joint	0.678	0.626	0.374	0.496	0.798	0.621
21.	HAT (Head Arm Trunk)	Greater trochanter / mid rib	0.678	1.142	-	0.903	1.456	-

در شکل ۲، عبارت‌های ① و ②، به ترتیب بیانگر حاصل‌ضرب مؤلفه‌های شتاب مفصل مچ پا در راستای z,y در جرم پا است. زاویه‌ی θ، در اینجا در جهت عقربه‌های ساعت است؛ پس علامت پشت $I\alpha$ در معادله‌ی گشتاور منفی است. این علامت، ربطی به علامت α ندارد؛ یعنی اگر α_{foot} منفی به دست آمده باشد، باید با همان علامت در رابطه جایگذاری شود. مؤلفه‌های F_{Ay} و F_{Az}، نیروهای وارد بر مفصل مچ پا در جهات y, z هستند. جهت M_A، در جهت

مثبت فرض می‌شود. برای محاسبه‌ی گشتاور حول زانو، نیروها و گشتاورهای وارد بر مفصل مچ پا از حل پا به مفصل مچ پای موجود در ترسیم آزاد نیروهای وارد بر ساق منتقل می‌شود (به‌صورت مساوی، موازی؛ ولی در خلاف جهت).



شکل ۲. نمایش شماتیک زاویه‌ی مچ پا (θ_foot) و محاسبه‌ی پارامترهای سینماتیکی

$$\Sigma\overrightarrow{M_A} = I_A\vec{\alpha} + A\vec{G}\times m_f\vec{a}_A$$

$$M_A + d_3F_y - d_2w_L = -I_A\alpha + d_1\ ① + d_2\ ②$$

$$M_A + \frac{80.8}{1000}(-71.9) - \frac{93.8}{1000}(9.425)$$
$$= -0.01663(3597) + \frac{17.05}{1000}(0.961)(-1.5) + \frac{93.8}{1000}(0.961)(1.75)$$

$$M_A = 6.767\ Nm$$

– مرحله‌ی ششم: محاسبه‌ی بازوها (d_4 و d_3 و d_2 و d_1)

در تحلیل دینامیکی یک بخش از بدن، مانند کف پا (Foot)، برای محاسبه‌ی گشتاور نیروها (Moments) نسبت به یک مفصل (اینجا مفصل مچ پا یا Ankle Joint)، باید فاصله‌ی عمودی یا افقی نیروها نسبت به آن مفصل را بدانیم. به این فاصله‌ها، اصطلاحاً بازوی گشتاور (Moment Arm) گفته می‌شود.

فرمول کلی گشتاور، به‌صورت زیر است:

$$M = F \times d$$

که در آن:

- M، گشتاور نسبت به یک نقطه (مفصل مچ پا)؛
- F، نیروی واردشده (مثلاً وزن قطعه، نیروی عکس‌العمل زمین)؛
- d، فاصله‌ی عمودی (مؤلفه عمودی فاصله) بین خط اثر نیرو و نقطه‌ی چرخش (Moment Arm) است.

نحوه‌ی محاسبه‌ی بازوهای گشتاور

برای محاسبه‌ی دقیق این فواصل، از مختصات نقاط در صفحه‌ی YZYZYZ استفاده می‌شود. فرض بر این است که زاویه‌ی کف پا نسبت به راستای افقی مشخص است و با استفاده از هندسه مثلثات و تشابه، می‌توان فواصل عمودی بین نقاط اثر نیرو و مفصل مچ پا را محاسبه کرد.

– مرحله هفتم: معادله‌ی گشتاور

$$\Sigma\overrightarrow{M_A} = I_A\vec{\alpha} + A\vec{G}\times m_f\vec{a}_A$$

تمامی فواصل و مختصات در محاسبه‌ی گشتاور، حتماً باید به متر تبدیل شوند.

جدول ۶. نتایج محاسبه‌ی بازوها (d_1 و d_2 و d_3 و d_4)

d_4	d_3	d_2	d_1
۰	۸۰/۸	۹۳/۸	۱۷/۰۵

– مرحله‌ی هشتم: موقعیت و شتاب مرکز ثقل پا. برای یافتن a_{Gy}, a_{Gz}، باید با استفاده از روابط مثلثات متشابه، مختصات مرکز ثقل مشخص شود. نسبت تشابه، متناسب است با نسبت فاصله‌ی مرکز جرم تا هریک از مفاصل که از جدول آنتروپومتری به دست می‌آید (۹).

جدول ۷. نتایج محاسبه‌ی مؤلفه‌های گشتاور در صفحه‌ی ساجیتال

d3 Fy	d4 Fz	d2 Wf	I α	d1 ①	d2 ②	MA
−۵/۸۱	۰	۰/۸۸۴	۰/۰۶	−۰/۰۲۵	۰/۱۵۸	۶/۷۶۷

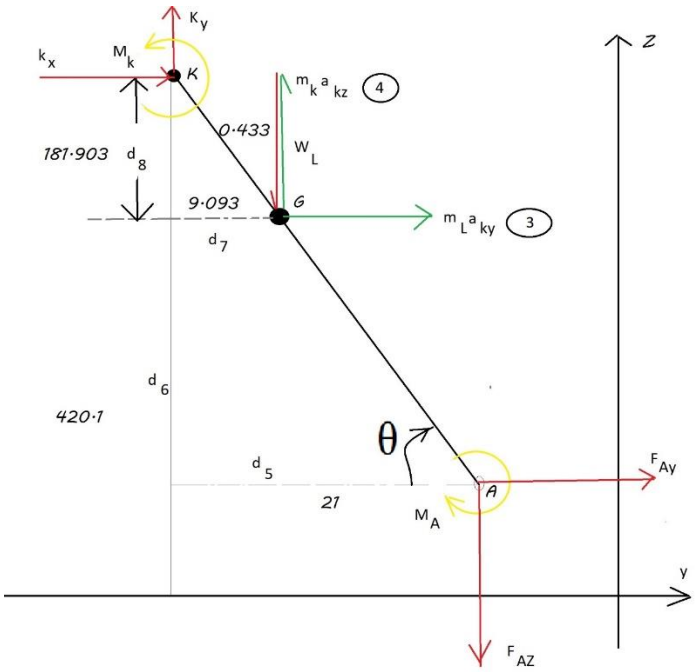
– مرحله‌ی نهم: معادله‌ی نیوتن و محاسبه‌ی نیروهای اعمالی به مفصل مچ پا

$$\sum Fz = m\,a_{Gz}\ ,\ \sum Fy = m\,a_{Gy}$$

جدول ۸. نتایج محاسبه‌ی موقعیت مرکز ثقل تصویر عضو در صفحه‌ی ساجیتال و متغیرهای سینماتیک آن

yG (mm)	zG (mm)	VyG (m/s)	VzG (m/s)	ayG (m/s2)	azG (m/s2)	F Ay (N)	F Az (N)
−۳۶۲/۶	۶۵						
−۳۶۱/۳۵	۶۴/۵	۰/۱۱	−۰/۰۶۲۵				
−۳۶۰/۴	۶۳/۷۵			−۲/۱۲۵	۱/۵	۶۹/۸۵۸	−۷۹۱/۷۳
−۳۵۹/۶۵	۶۳/۳	۰/۰۶۷۵	−۰/۰۳۲۵				
−۳۵۹/۰۵	۶۳/۱						

– سایر مراحل: برای به دست آوردن گشتاور زانو، هفت مرحله‌ی اول برای عضو ساق پا اجرا می‌شود.



شکل ۳. دیاگرام گشتاور اعمال‌شده به مفصل مچ پا و زانو بر اساس تحلیل دینامیک معکوس

$$\sum F_y = m_F \vec{a}_y \Longrightarrow F_y + F_{Ay} = 0.961(-2.125) \Longrightarrow F_{Ay} = 69.858N$$

$$\sum F_Z = m_F \vec{a}_Z \Longrightarrow F_Z + F_{AZ} + W_L = 0.961(1.5) \Longrightarrow F_{AZ} = -791.734N$$

$$\sum \vec{M}_k = I\vec{\alpha} + \overrightarrow{k_G} \times m_L \overrightarrow{a_k}$$

$$M_k - M_A - d_7 w_L - d_5 F_{Az} + d_6 F_{AY} = -I_k \alpha_F + d_8 ❸ + d_7 ❹$$

$$M_k - 6.767 - \frac{9.903}{1000}30.225 - \frac{21}{1000}(-791.734) + \frac{420.1}{1000}69.858$$
$$= -0.152(8.473) + \frac{181.903}{1000}(3.081)(2.25) + \frac{9.093}{1000}(3.081)(-2)$$
$$\Longrightarrow M_k = -39.014Nm$$

جدول ۹. نتایج تحلیل سینماتیک داده‌های جدول ۱ برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه‌ی ساجیتال بر اساس روابط مشتق مرکزی و توابع مثلثاتی

ΔY (mm)	ΔZ (mm)	KA yz (mm)	Θ,Leg (rad)	ω,Leg (rad/s)	α,Leg (rad/s2)	Vy,Knee (m/s)	Vz,Knee (m/s)	ay,Knee (m/s2)	az,Knee (m/s2)
۳۳/۶	۴۱۸/۷		۱/۴۹۰۷۲						
۲۷/۳	۴۱۹/۳		۱/۵۰۵۷۸	۱/۵۰۶۵		۰/۷۳	۰/۰۶		
۲۱	۴۲۰/۱	۴۲۰/۶۲۵	۱/۵۲۰۸۵		۸/۴۷۳			۲/۲۵	−۲
۱۴/۲	۴۲۰/۴		۱/۵۳۷۰۳۲	۱/۶۷۶		۰/۷۷۵	۰/۰۲		
۶/۹	۴۲۰		۱/۵۵۴۳۶۹						

جدول ۱۰. نتایج محاسبه‌ی اینرسی‌ها برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه‌ی ساجیتال

W,total	W,Leg	mLeg	rG L/K	I L/K
۶۵۰	۳۰/۲۲۵	۳/۰۸۱۰۴	۰/۲۲۲۰۹	۰/۱۵۲

جدول ۱۱. نتایج محاسبه‌ی بازوهای گشتاورگیری برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه‌ی ساجیتال

d5	d6	d7	d8
۹/۰۹۳	۱۸۱/۹۰۳	۲۱	۴۲۰/۱

جدول ۱۲. نتایج محاسبه‌ی مؤلفه‌های گشتاور برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه‌ی ساجیتال

d7 WL	d5 FAz	d6 FAy	Il/K αL	d8 ③	d7 ④	MK
۰/۲۷۵	−۱۶/۶۲۶	۲۹/۳۴۸	۱/۲۸۸	۱/۲۶۱	−۰/۰۵۶	−۳۹/۰۱۵

بحث و نتیجه‌گیری

استفاده از روش‌های دوبعدی در تحلیل اجسام سه‌بعدی که در فضا حرکت می‌کنند، امکان نظارت بر نتایج را فراهم می‌آورد. همچنین محققان با این رویکرد، می‌توانند بر صحت نتایج و روند فضایی زمانی متغیرهای سینماتیک نظارت کنند و از بروز خطاهای مختلف محاسباتی و مدل‌سازی ریاضی در توصیف حرکات سه‌بعدی پیشگیری و اجتناب نمایند.

منابع

1. Wren TA, Gorton GE, Ounpuu S. 3D gait analysis in orthopedics: Accuracy and challenges. Journal of Pediatric Orthopedics. 2020;40(3):145-52.
2. Smith TJ, Wren TA, McCarty K. Limitations of 3D motion capture in clinical settings. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering. 2022;30:1100-8.
3. Johnson M, Lee H, Patel R. Accuracy of 2D motion analysis for clinical gait evaluation. Journal of Biomechanics. 2023;145:111228.
4. Lee D, Kim Y, Han J. 2D projection-based moment of inertia estimation for lower limb analysis. Gait & Posture. 2024;102:88-95.
5. Seo K, Park S, Lee H. Wearable-based gait assessment using 2D analysis in stroke patients. Clinical Biomechanics. 2020;74:32-40.
6. Craig JJ. Introduction to robotics: Mechanics and control. 3rd ed. Pearson Education; 2005.
7. Sciavicco L, Siciliano B. Modelling and control of robot manipulators. 2nd ed. Springer; 2012.
8. Featherstone R. Rigid body dynamics algorithms. Springer; 2008.
9. Winter DA. Biomechanics and motor control of human movement. 4th ed. Wiley; 2009.
10. Shabana AA. Dynamics of multibody systems. 4th ed. Cambridge University Press; 2013.

استناد به این مقاله: دهقانی، ماجد، ذوالریاستین، شهاب، درجانی، مرتضی، و طباطبائی قمشه، فرهاد. (۱۴۰۴). تحلیل سینتیک در حرکات سه‌بعدی با استفاده از روش‌های دینامیک معکوس دوبعدی. *فصلنامه پیشرفت‌های مهندسی در حوزه‌ی پزشکی و مواد*، ۱(۱)، ۱۹-۳۰.

Journal of Recent Advancements in Material Science and Biomedical Engineering is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.